En kort introduksjon til generell relativitetsteori

Generell relativitetsteori (GR) representerer vår mest fundamentale forståelse av tid, rom og gravitasjon, og er helt nødvendig for å formulere konsistente kosmologiske modeller. Den er en geometrisk teori, og kan formuleres på en koordinatfri måte. Det vil føre for langt å gjøre dette her, og i praktiske beregninger må man allikevel velge et koordinatsystem å gjøre beregningene i. Vi vil derfor bruke den mer gammeldagse formuleringen av teorien i disse forelesningene. Først av alt trenger vi å vite hva tensorer er for noe.

Tensorer

Gitt to punkter P og Q med koordinater henholdsvis x^μ og $x^\mu + dx^\mu$, der $\mu = 0, 1, \ldots n-1$ (slik at rommet har n dimensjoner). Disse to punktene definerer en infinitesimal vektor $\vec{PQ}$, som vi betrakter som 'festet' til begynnelsespunktet P. Komponentene av vektoren i x^μ-koordinatsystemet er dx^μ. I et annet koordinatsystem x'^μ forbundet med x^μ-systemet ved transformasjonene $x'^\mu = x'^\mu(x^\nu)$, har den samme vektoren koordinater som vi finner ved å bruke kjerneregelen for derivasjon,

$$dx'^\mu = \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\nu} dx^\nu,$$

der vi bruker konvensjonen om at en indeks som forekommer to ganger skal summeres over, dvs. vi summerer over ν. Den partiellderiverte skal regnes ut i punktet P. En **kontravariant vektor** (kan også kalles en **kontravariant tensor av rang 1**) er et sett av størrelser A^μ i x^μ-systemet som transformerer på samme måte som dx^μ:

$$A'^\mu = \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\nu} A^\nu,$$

der de partiellderiverte igjen skal regnes ut i punktet P. En **kontravariant tensor av rang 2** er et sett av n^2 størrelser assosiert med punktet P, $T^{\mu\nu}$ i x^μ-systemet som transformerer slik:

$$T'^{\mu\nu} = \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\alpha} \frac{\partial x'^\nu}{\partial x^\beta} T^{\alpha\beta}.$$

Et enkelt eksempel på en slik størrelse er produktet av to kontravariante vektorer $A^\mu B^\nu$. Vi kan definere kontravariante tensorer av vilkårlig høy rang ved å ta med flere $\partial x'^\mu / \partial x^\alpha$-faktorer. Et viktig spesialtilfelle er en kontravariant tensor av rang null, en såkalt **skalar** ϕ som transformerer som

$$\phi' = \phi$$

La $\phi = \phi(x^\mu)$ være en skalar funksjon som er kontinuerlig og deriverbar, slik at den deriverte $\partial \phi / \partial x^\mu$ eksisterer i alle punkter i rommet. Vi kan betrakte koordinatene x^μ som funksjoner av x'^ν og skrive

$$\phi = \phi(x^\mu(x'^\nu)).$$

Bruker vi kjerneregelen til å derivere med hensyn til x'^{ν}, får vi

$$\frac{\partial \phi}{\partial x'^{\nu}} = \frac{\partial x^{\mu}}{\partial x'^{\nu}} \frac{\partial \phi}{\partial x^{\mu}}.$$

Dette er prototypen på hvordan en **kovariant vektor** (også kalt en **kovariant tensor av rang 1**) transformerer. Dette er generelt et sett av størrelser A_μ assosiert med punktet x^μ som transformerer som

$$A'_\mu = \frac{\partial x^{\nu}}{\partial x'^{\mu}} A_\nu.$$

Merk at x og x' har byttet plass i den partiellderiverte som inngår. På samme måte som med kontravariante tensorer kan vi gå videre og definere kovariante tensorer av høyere rang. For eksempel: en kovariant tensor av rang 2 transformerer som

$$T'_{\mu\nu} = \frac{\partial x^{\alpha}}{\partial x'^{\mu}} \frac{\partial x^{\beta}}{\partial x'^{\nu}} T_{\alpha\beta}.$$

Vi kan også ha blandede tensorer. En blandet tensor av rang 3 kan for eksempel ha én kontravariant og to kovariante indekser, og vil da transformere som

$$T'^{\mu}{}_{\nu\sigma} = \frac{\partial x'^{\mu}}{\partial x^{\alpha}} \frac{\partial x^{\beta}}{\partial x'^{\nu}} \frac{\partial x^{\gamma}}{\partial x'^{\sigma}} T^{\alpha}_{\beta\gamma}.$$

Hvorfor er tensorer viktige? En viktig grunn til at de er viktige i relativitetsteori ser vi dersom vi ser på tensorligningen

$$X_{\mu\nu} = Y_{\mu\nu}.$$

Dette er en ligning som sier at komponentene til de kovariante tensorene X og Y er like i et koordinatsystem x. Men da har vi også at

$$\frac{\partial x^{\mu}}{\partial x'^{\alpha}} \frac{\partial x^{\nu}}{\partial x'^{\beta}} X_{\mu\nu} = \frac{\partial x^{\mu}}{\partial x'^{\alpha}} \frac{\partial x^{\nu}}{\partial x'^{\beta}} Y_{\mu\nu}$$

og siden vi vet at X og Y transformerer som kovariante tensorer av rang 2, har vi at $X'_{\alpha\beta} = Y'_{\alpha\beta}$. Med andre ord er alle komponentene til X og Y like også i det nye koordinatsystemet. En tensorligning er med andre ord gyldig i **alle** koordinatsystemer, og tensorer spiller derfor en avgjørende rolle når vi skal formulere naturlover som er gyldige uavhengig av valg av referansesystem.

Tensorer kan adderes og subtraheres på opplagt vis. En tensor av rang 2 er symmetrisk dersom (vist her for kovariante tensorer) $X_{\mu\nu} = X_{\nu\mu}$, og antisymmetrisk dersom $X_{\mu\nu} = -X_{\nu\mu}$. Enhver tensor av rang 2 kan skrives som en sum av en symmetrisk del $X_{(\mu\nu)}$ og en antisymmetrisk del $X_{[\mu\nu]}$, der

$$\begin{aligned} X_{(\mu\nu)} &= \frac{1}{2}\left(X_{\mu\nu} + X_{\nu\mu}\right) \\ X_{[\mu\nu]} &= \frac{1}{2}\left(X_{\mu\nu} - X_{\nu\mu}\right) \end{aligned}$$

noe du lett kan sjekke. En annen viktig operasjon er **kontraksjon**: fra en tensor av kontravariant rang $p \geq 1$ og kovariant rang $q \geq 1$ kan vi danne en tensor av rang $(p-1, q-1)$ ved å sette to indekser lik hverandre og summere over dem. For eksempel kan vi fra tensoren $X^{\mu}_{\nu\gamma\sigma}$ danne tensoren $Y_{\gamma\sigma}$ ved å sette

$$Y_{\gamma\sigma} = X^{\mu}_{\mu\gamma\sigma}.$$

Merk at dersom vi kontraherer en tensor av rang $(1,1)$ får vi en skalar.

Den metriske tensor

En spesielt viktig tensor $g_{\mu\nu}$ av rang 2 er den **metriske tensoren** eller **metrikken**. Den er en symmetrisk tensor som kan brukes til å definere avstanden mellom to nabopunkter x^μ, $x^\mu + dx^\mu$:

$$ds^2 = g_{\mu\nu}(x) dx^\mu dx^\nu.$$

Den definerer også lengden til en vektor A i punktet x ved

$$A^2 = g_{\mu\nu}(x) A^\mu A^\nu,$$

og skalarproduktet mellom to vektorer A og B,

$$AB = g_{\mu\nu}(x) A^\mu B^\nu.$$

To vektorer sies å være ortogonale dersom skalarproduktet deres er lik null. I relativitetsteori er det mulig at lengden av en vektor (som ikke er lik nullvektoren) kan være lik null, $A^2 = 0$. Vi kan oppfatte metrikken som en $n \times n$-matrise, og determinanten dens betegnes med g, $g = \det(g_{\mu\nu})$. Dersom determinanten er forskjellig fra null, har metrikken en invers, og denne er en kontravariant tensor av rang 2, $g^{\mu\nu}$ som oppfyller

$$g_{\mu\alpha} g^{\alpha\nu} = \delta^\nu_\mu,$$

der $\delta^\nu_\mu = 1$ for $\mu = \nu$ og lik null ellers. Tensoren $g_{\mu\nu}$ kan brukes til å senke indekser, og $g^{\mu\nu}$ hever indekser. For eksempel:

$$\begin{aligned} T^{\nu}_{\mu} &= g_{\mu\alpha} T^{\alpha\nu} \\ T^{\mu}_{\nu} &= g^{\mu\alpha} T_{\alpha\nu}. \end{aligned}$$

Ekvivalensprinsippet

Generell relativitetsteori starter med ekvivalensprinsippet. En observatør i fritt fall observerer ikke noe tyngdefelt. Om han slipper en gjenstand som han til å begynne med holder i ro ved siden av seg, vil gjenstanden forbli i ro etter at han har sluppet den, Han har derfor rett til å regne seg selv for å være i ro. Mer presist kan vi si: *I et vilkårlig punkt i et tyngdefelt kan vi velge et referansesystem, det såkalte fritt-fallsystemet, definert ved at det beveger seg med akselerasjonen* *et legeme i fritt fall ville hatt i det samme punktet. I dette systemet vil alle fysikkens lover ha samme form som i den spesielle relativitetsteorien. Unntaket er tyngdekraften, som forsvinner lokalt i dette systemet.*

To kommentarer er på sin plass:

1. Denne formuleringen av ekvivalensprinsippet omfatter at treg masse, m_I (som inngår i Newtons 2. lov) er lik graviterende masse m_G (som inngår i tyngdeloven). Hvis ikke dette var tilfellet, ville f.eks. observatøren og gjenstanden han slipper kunne ha forskjellige akselerasjoner, og da ville de ikke være i ro relativt til hverandre.

2. Merk at formuleringen sier *i et punkt*. Det vil si: det er generelt ikke mulig å finne et referansesystem som dekker hele tidrommet og der tyngdekraften er transformert bort.

Ekvivalensprinsippet er viktig fordi vi kan bruke det til å lage relativistisk korrekte ligninger: start med å analysere situasjonen i fritt-fallsystemet der fysikken er forholdsvis enkel, Dersom vi kan formulere resultatet som en tensorligning, vet vi at den vil være gyldig i alle referansesystemer.

Geodetligningen

La oss bruke ekvivalensprinsippet til å finne bevegelsesligningen for en partikkel i et tyngdefelt. Vi starter i fritt-fallsystemet der vi kan bruke spesiell relativitetsteori. La punktet vi ser på ha koordinater $\xi^\mu = (t, x, y, z)$, der vi har valgt enheter der $c = 1$. Jeg følger Dodelson og skriver linjelementet som

$$ds^2 = -dt^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2 = \eta_{\mu\nu} d\xi^\mu d\xi^\nu,$$

der Minkowskimetrikken altså er $\eta_{\mu\nu} = \mathrm{diag}(-1, 1, 1, 1)$. Siden partikkelen ikke er påvirket av noen krefter i fritt-fallsystemet er bevegelsesligningen i følge spesiell relativitetsteori ganske enkelt

$$\frac{d^2\xi^\mu}{d\tau^2} = 0,$$

der $d\tau^2 = -ds^2$ er **egentid**, dvs. tid målt på en klokke i systemet der partikkelen er i ro. Denne ligningen er en tensorligning i spesiell relativitetsteori: under Lorentztransformasjoner oppfører ξ seg som en firervektor, og τ er en skalar. Men Lorentztransformasjoner gjelder bare mellom systemer som er beveger seg med konstant hastighet i forhold til hverandre. Vi må ha en ligning som er invariant under mer generelle transformasjoner enn dette. La oss se på hva som skjer med ligingen over under en generell transformasjon til nye koordinater x^μ. Under en slik generell transformasjon vil

$$d\xi^\mu = \frac{\partial \xi^\mu}{\partial x^\nu} dx^\nu,$$

slik at

$$\frac{d\xi^\mu}{d\tau} = \frac{\partial \xi^\mu}{\partial x^\nu} \frac{dx^\nu}{d\tau}.$$

Da har vi at

$$\begin{aligned}0 &= \frac{d^2\xi^\mu}{d\tau^2} = \frac{d}{d\tau}\left(\frac{\partial\xi^\mu}{\partial x^\nu}\frac{dx^\nu}{d\tau}\right) \\ &= \frac{\partial\xi^\mu}{\partial x^\nu}\frac{d^2x^\nu}{d\tau^2} + \frac{dx^\nu}{d\tau}\frac{d}{d\tau}\left(\frac{\partial\xi^\mu}{\partial x^\nu}\right) \\ &= \frac{\partial\xi^\mu}{\partial x^\nu}\frac{d^2x^\nu}{d\tau^2} + \frac{\partial^2\xi^\mu}{\partial x^\nu\partial x^\rho}\frac{dx^\nu}{d\tau}\frac{dx^\rho}{d\tau}\end{aligned}$$

Nå ganger vi ligningen med $\partial x^\sigma/\partial\xi^\mu$ og summerer over μ. I det første leddet får vi da faktoren

$$\frac{\partial x^\sigma}{\partial\xi^\mu}\frac{\partial\xi^\mu}{\partial x^\nu}\frac{d^2x^\nu}{d\tau^2} = \frac{\partial x^\sigma}{\partial x^\nu}\frac{d^2x^\nu}{d\tau^2} = \delta^\sigma_\nu\frac{d^2x^\nu}{d\tau^2} = \frac{d^2x^\sigma}{d\tau^2}$$

Dermed får vi

$$\frac{d^2x^\sigma}{d\tau^2} + \frac{\partial x^\sigma}{\partial\xi^\mu}\frac{\partial^2\xi^\mu}{\partial x^\nu\partial x^\rho}\frac{dx^\nu}{d\tau}\frac{dx^\rho}{d\tau} = 0.$$

Vi skriver denne ligningen som

$$\frac{d^2x^\sigma}{d\tau^2} + \Gamma^\sigma_{\nu\rho}\frac{dx^\nu}{d\tau}\frac{dx^\rho}{d\tau} = 0,$$

der

$$\Gamma^\sigma_{\nu\rho} = \frac{\partial x^\sigma}{\partial\xi^\mu}\frac{\partial^2\xi^\mu}{\partial x^\nu\partial x^\rho}$$

kalles **Christoffelsymbolet** eller **konneksjonen**. I de nye koordinatene er uttrykket for egentiden gitt ved

$$d\tau^2 = -\eta_{\mu\nu}d\xi^\mu d\xi^\nu = -\eta_{\mu\nu}\frac{\partial\xi^\mu}{\partial x^\alpha}\frac{\partial\xi^\nu}{\partial x^\beta}dx^\alpha dx^\beta \equiv -g_{\alpha\beta}dx^\alpha dx^\beta,$$

der metrikken i de nye koordinatene er

$$g_{\alpha\beta} = \eta_{\mu\nu}\frac{\partial\xi^\mu}{\partial x^\alpha}\frac{\partial\xi^\nu}{\partial x^\beta}.$$

Du kan nå overbevise deg selv om at den nye bevegelsesligningen, som kalles **geodetligningen**, beholder formen dersom vi gjennomfører en generell koordinattransformasjon. Det du trenger å vite er at Christoffelsymbolet *ikke* er en tensor, men transformer som

$$\Gamma'^\alpha_{\beta\gamma} = \frac{\partial x'^\alpha}{\partial x^\delta}\frac{\partial x^\eta}{\partial x'^\beta}\frac{\partial x^\phi}{\partial x'^\gamma}\Gamma^\delta_{\eta\phi} + \frac{\partial x'^\alpha}{\partial x^\delta}\frac{\partial^2 x^\delta}{\partial x'^\beta\partial x'^\gamma}.$$

Hvis vi innfører den kovariant deriverte

$$\nabla_\gamma A^\alpha = \frac{\partial A^\alpha}{\partial x^\gamma} + \Gamma^\alpha_{\beta\gamma}A^\beta,$$

(skriver ofte denne som $A^\alpha_{;\gamma}$) kan vi vise at $\nabla_\gamma A^\alpha$ transformerer som en blandet tensor av rang 2. Partikkelens bane er gitt ved $x^\mu(\tau)$. Tangentvektoren til banen i et gitt punkt er gitt ved $X^\mu = dx^\mu/d\tau$, som transformerer som en kontravariant vektor. Det er da ikke så vanskelig å vise (gjør det!) at geodetligningen kan skrives som

$$X^\gamma \nabla_\gamma X^\alpha = 0.$$

Ofte bruker vi notasjonen $\nabla_\gamma X^\alpha = X^\alpha_{;\gamma}$, og $\frac{\partial X^\alpha}{\partial x^\gamma} = X^\alpha_{,\gamma}$. Da kan vi skrive geodetligningen enkelt som

$$X^\gamma X^\alpha_{;\gamma} = 0.$$

Skrevet på denne formen er det helt klart at geodetligningen er en tensorligning, som dermed er gyldig i alle referansesystemer. Merk at ligningen er invariant under generelle transformasjoner, også rene koordinattransformasjoner som for eksempel et bytte fra kartesiske til sfæriske koordinater. Dette gjør at det i generell relativitetsteori av og til kan være vanskelig å skille fysiske effekter fra effekter som skyldes valg av koordinater. Dette er et problem som dukker opp i forbindelse med kosmologisk perturbasjonsteori, det såkalte **gaugeproblemet**. Vi kommer tilbake til dette senere.

I etterpåklokskap kan vi også 'utlede' geodetligningen på en veldig enkel måte. I fritt-fallsystemet er tangentvektoren til partikkelens bane gitt ved $\Xi^\mu = d\xi^\mu/d\tau$, og bevegelsesligingen kan skrives

$$\frac{d}{d\tau}\left(\frac{d\xi^\mu}{d\tau}\right) = \frac{d}{d\tau}\Xi^\mu = 0.$$

Ved å bruke kjerneregelen kan vi skrive dette om til

$$\frac{d\xi^\nu}{d\tau}\frac{\partial \Xi^\mu}{\partial \xi^\nu} = \Xi^\nu \Xi^\mu_{,\nu} = 0.$$

Partiellderivasjon er ingen tensoroperasjon, men kovariant derivasjon er, og i fritt-fallsystemet er disse to operasjonene de samme (siden alle Christoffelsymbolene er lik null i dette systemet), så vi kan bytte ut kommaet med et semikolon:

$$\Xi^\nu \Xi^\mu_{;\nu} = 0.$$

Nå har vi ført bevegelsesligningen over på en form som er en tensorligning, og følgelig er den gyldig i alle referansesystemer.

Legg merke til at Γ og $g_{\mu\nu}$ er geometriske størrelser. Tyngdekraften er bakt inn i geometrien til tidrommet, og er dermed blitt til en geometrisk effekt. Siden både Γ og g er geometriske størrelser, er det kanskje ikke noen overraskelse at det er en sammenheng mellom dem. Jeg setter opp sammenhengen uten bevis:

$$\Gamma^\sigma_{\mu\nu} = \frac{1}{2} g^{\rho\sigma}\left(\frac{\partial g_{\nu\rho}}{\partial x^\mu} + \frac{\partial g_{\mu\rho}}{\partial x^\nu} - \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\rho}\right).$$

Metrikken er dermed et meget viktig objekt i GR: kjenner vi denne, så kjenner vi geometrien til tidrommet, og geometrien til tidrommet bestemmer hvordan partikler beveger seg.

Litt mer om den kovariant deriverte til slutt. Generelt for en blandet tensor har vi at den kovariant deriverte er gitt ved

$$\nabla_\gamma T^{\alpha\cdots}_{\beta\cdots} = \frac{\partial}{\partial x^\gamma} T^{\alpha\cdots}_{\beta\cdots} + \Gamma^{\alpha}_{\delta\gamma} T^{\delta\cdots}_{\beta\cdots} + \cdots - \Gamma^{\delta}_{\beta\gamma} T^{\alpha\cdots}_{\delta\cdots} - \cdots,$$

slik at hver kontravariant indeks gir opphav til et Christoffelsymbol med positivt fortegn, mens hver kovariant indeks gir opphav til et Christoffelsymbol med negativt fortegn. For en kontravariant tensor av rang 2 blir uttrykket

$$\nabla_\gamma T^{\mu\nu} = \frac{\partial}{\partial x^\gamma} T^{\mu\nu} + \Gamma^{\mu}_{\beta\gamma} T^{\beta\nu} + \Gamma^{\nu}_{\beta\gamma} T^{\mu\beta}.$$

Newtonsk grense

Vi ser på en partikkel som beveger sakte i et svakt, statisk gravitasjonsfelt. Husk at vi har satt lyshastigheten lik 1, så sakte bevegelse betyr

$$\frac{dx^i}{dt} \ll 1.$$

I geodetligningen betyr dette at alle ledd som inneholder $dx^i/d\tau$ $(i = 1, 2, 3)$ kan neglisjeres sammenlignet med $(dt/d\tau)^2$-leddet, slik at vi får

$$\frac{d^2 x^\sigma}{d\tau^2} + \Gamma^{\sigma}_{00} \left(\frac{dt}{d\tau} \right)^2 = 0.$$

At gravitasjonsfeltet er svakt betyr at metrikken er ikke kan avvike mye fra Minkowskimetrikken for flatt tidrom. Vi skriver den derfor som

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu},$$

der $|h_{\mu\nu}| \ll 1$. Vi kan derfor neglisjere alle ledd som innholder mer enn én faktor $h_{\mu\nu}$. At gravitasjonsfeltet er statisk betyr at

$$\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial t} = \frac{\partial h_{\mu\nu}}{\partial t} = 0.$$

Christoffelsymbolet vi trenger blir da

$$\Gamma^{\sigma}_{00} = \frac{g^{\rho\sigma}}{2} \left(\frac{\partial g_{0\rho}}{\partial x^0} + \frac{\partial g_{0\rho}}{\partial x^0} - \frac{\partial g_{00}}{\partial x^\rho} \right) = -\frac{1}{2} \eta^{\rho\sigma} \frac{\partial h_{00}}{\partial x^\rho}.$$

For $\sigma = i = 1, 2, 3$ blir geodetligningen

$$\frac{d^2 x^i}{d\tau^2} = \frac{\eta^{i\rho}}{2} \frac{\partial h_{00}}{\partial x^\rho} \left(\frac{dt}{d\tau} \right)^2 = \frac{1}{2} \left(\frac{dt}{d\tau} \right)^2 \frac{\partial h_{00}}{\partial x^i}.$$

Videre, for $\sigma = 0$ ser vi at $\Gamma^{0}_{00} \propto \frac{\partial h_{00}}{\partial t} = 0$, så denne komponenten av geodetligningen blir rett og slett

$$\frac{d^2 t}{d\tau^2} = 0,$$

slik at $dt/d\tau =$ konstant. Da kan vi dele ligningene for $\sigma = i$ med $(dt/d\tau)^2$ og få

$$\frac{d^2x^i}{dt^2} = \frac{1}{2}\frac{\partial h_{00}}{\partial x^i}.$$

For en partikkel i et statisk gravitasjonspotensial Ψ i Newtonsk mekanikk ville bevegelsesligningen være

$$\frac{d^2x^i}{dt^2} = -\frac{\partial \Psi}{\partial x^i},$$

så vi ser at dersom vi identifiserer $h_{00} = -2\Psi$, så gir geodetligningen oss den Newtonske grensen. Med andre ord må 00-komponenten av metrikken være $g_{00} = -1 - 2\Psi$.

Viktige tensorer i GR

Som sagt er Christoffelsymbolet ingen tensor. Men det kan brukes til å konstruere tensorer som er relatert til rommets krumning. De vi trenger å kjenne til er **Riemanntensoren**

$$R^\mu_{\sigma\beta\alpha} = \Gamma^\mu_{\sigma\alpha,\beta} - \Gamma^\mu_{\sigma\beta,\alpha} + \Gamma^\mu_{\rho\beta}\Gamma^\rho_{\sigma\alpha} - \Gamma^\mu_{\rho\alpha}\Gamma^\rho_{\sigma\beta},$$

der jeg har innført notasjonen

$$_{,\alpha} = \frac{\partial}{\partial x^\alpha}.$$

Riccitensoren får vi ved å kontrahere to indekser i Riemanntensoren:

$$R_{\mu\nu} = \Gamma^\alpha_{\mu\nu,\alpha} - \Gamma^\alpha_{\mu\alpha,\nu} + \Gamma^\alpha_{\beta\alpha}\Gamma^\beta_{\mu\nu} - \Gamma^\alpha_{\beta\nu}\Gamma^\beta_{\mu\alpha}.$$

Ricciskalaren er gitt ved

$$\mathcal{R} = g^{\mu\nu}R_{\mu\nu}.$$

Endelig er **Einsteintensoren** gitt ved

$$G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}\mathcal{R}.$$

Einsteintensoren har den viktige egenskapen at dens kovariante divergens er lik null: $G^{\mu\nu}_{;\nu} = 0$.

Energi-impulstensoren

La oss vende tilbake til spesiell relativitetsteori et øyeblikk. Vi ser på et system av ikke-vekselvirkende partikler med tetthet beskrevet av funksjonen $\rho(x)$. Denne funksjonen lar vi representere tettheten målt av en observatør som beveger seg med partikkelstrømmen, karakterisert ved firerhastighetsfeltet

$$u^\mu = \frac{dx^\mu}{d\tau}.$$

Fra disse størrelsene kan vi danne en kontravariant tensor av rang 2:

$$T^{\mu\nu} = \rho u^\mu u^\nu.$$

I spesiell relativitetsteori har vi

$$u^\mu = \gamma(1, \vec{u}),$$

der $\vec{u} = d\vec{x}/dt$,

$$d\tau^2 = -ds^2 = dt^2 - d\vec{x}^2 = dt^2(1 - u^2) = \frac{dt^2}{\gamma^2},$$

og $\gamma = (1 - u^2)^{-1/2}$. Hvis vi skriver ut T som en matrise, ser den slik ut:

$$(T^{\mu\nu}) = \rho \begin{pmatrix} 1 & u_x & u_y & u_z \\ u_x & u_x^2 & u_x u_y & u_x u_z \\ u_y & u_x u_y & u_y^2 & u_y u_z \\ u_z & u_x u_z & u_y u_z & u_z^2 \end{pmatrix}$$

Fra fluidmekanikk kjenner vi kontinuitetsligningen

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \vec{u}) = 0,$$

som uttrykker bevaring av masse. Med vår definisjon av T kan vi uttrykke denne ligningen på en veldig kompakt måte. For hvis vi regner ut $T^{0\nu}_{,\nu}$, får vi

$$T^{0\nu}_{,\nu} = \frac{\partial T^{0\nu}}{\partial x^\nu} = \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho u_x}{\partial x} + \frac{\partial \rho u_y}{\partial y} + \frac{\partial \rho u_z}{\partial z} = \frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \vec{u}).$$

Dermed kan kontinuitetsligningen skrives som

$$T^{0\nu}_{,\nu} = 0.$$

En annen viktig ligning i hydrodynamikk, Navier-Stokesligningen sier at for en væske uten indre trykk og ytre krefter gjelder

$$\rho \left[\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + (\vec{u} \cdot \nabla)\vec{u} \right] = 0.$$

Fysisk sier denne ligningen at bevegelsesmengden er bevart. Man kan vise at denne ligningen på komponentform med vårt valg av T kan skrives som

$$T^{i\nu}_{,\nu} = 0,$$

for $i = 1, 2, 3$. Vi kan dermed sammenfatte bevaring av masse og bevegelsesmengde for systemet vårt på en svært elegant måte i ligningen

$$T^{\mu\nu}_{,\nu} = 0.$$

Skrevet på denne formen ser vi også straks at generaliseringen av denne ligningen til GR bør være

$$T^{\mu\nu}_{;\nu} = 0.$$

Fordi den oppsummerer bevaring av masse (energi) og bevegelsesmengde (impuls), kalles denne tensoren for **energi-impulstensoren**.

Det tilfellet vi vil ha mest med å gjøere, er en **perfekt væske**. Denne er karakterisert ved (energi)tettheten, $\rho = \rho(x)$, trykket $p = p(x)$ og firerhastighetsfeltet $u^\mu = dx^\mu/d\tau$. Dersom trykket $p = 0$, bør vi ende opp med samme energi-impulstensor som i forrige avsnitt. Det antyder at vi bør velge

$$T^{\mu\nu} = \rho u^\mu u^\nu + pS^{\mu\nu},$$

der $S^{\mu\nu}$ er en symmetrisk tensor. De eneste symmetriske tensorene av rang 2 som er forbundet med væsken er $u^\mu u^\nu$ og den metriske tensoren $g^{\mu\nu}$, så det enkleste valget er

$$S^{\mu\nu} = Au^\mu u^\nu + Bg^{\mu\nu},$$

der A og B er konstanter. Vi benytter oss av det faktum at tensoren bør ha en spesiell-relativistisk grense vi kan leve med. I denne grensen er $g^{\mu\nu} = \eta^{\mu\nu}$, Minkowskimetrikken. Det vi ønsker oss aller mest i hele verden er at $T^{\mu\nu}_{,\nu}$ igjen skal uttrykke bevaring av energi og bevegelsesmengde. Krever vi at $T^{0\nu}_{,\nu} = 0$ skal gi oss kontinuitetsligningen, og at $T^{i\nu}_{,\nu} = 0$ skal gi oss Navier-Stokes (denne gangen med trykkledd, men uten ytre krefter), finner vi at dette bare er tilfellet dersom $A = B = 1$. Vi velger derfor

$$T^{\mu\nu} = (\rho + p)u^\mu u^\nu + pg^{\mu\nu},$$

og den oppfyller betingelsen $T^{\mu\nu}_{;\nu} = 0$: vi sier at den har kovariant divergens lik 0.

Einsteins feltligninger

Vi har nå to tensorer, $G_{\mu\nu}$ og $T_{\mu\nu}$, som begge har kovariant divergens lik null. Den ene, Einsteintensoren, har med geometri å gjøre. Den andre, energi-impulstensoren, har med masse, energi, og trykk å gjøre. Einstein postulerte at disse to tensorene er proporsjonale,

$$G_{\mu\nu} = 8\pi G T_{\mu\nu},$$

der proporsjonalitetskonstanten $8\pi G$ er med for å få riktig newtonsk grense. Dette er Einsteins feltligninger, et av høydepunktene i menneskets intellektuelle historie (og dette sier jeg uten det minste snev av ironi). Merk at Einsteins feltligninger ikke kan utledes matematisk fra postulatene i relativitetsteorien, men valget over er det enkleste som er konsistent med dem. Om man ønsker det, så kan man skrive ned mer kompliserte feltligninger. Den riktige formen må til syvende og sist avgjøres av naturen. Så langt har den ikke gitt oss noen vektige grunner til å tro at Einsteins valg var galt.

Friedmannligningene

For en gitt energi-impulstensor kan det å løse Einsteinligningene være en svært komplisert oppgave. Men i noen tilfeller har $T_{\mu\nu}$ symmetrier som forenkler problemet nok til at vi kan klare brasene. Ett slikt tilfelle er for et homogent, isotropt univers fylt med en eller flere perfekte væsker. Et slikt univers husker vi er beskrevet av Robertson-Walkerlinjeelementet. I dette kurset skal vi begrense oss til å se på flate universmodeller. I dette tilfellet er linjeelementet gitt ved

$$ds^2 = -dt^2 + a^2(t)(dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2\theta d\phi^2),$$

i sfæriske koordinater. For oss er det enklere å jobbe med kartesiske koordinater, og i disse er linjeelementet ganske enkelt

$$ds^2 = -dt^2 + a^2(t)((dx^1)^2 + (dx^2)^2 + (dx^3)^2) = -dt^2 + a^2(t)d\vec{x}^2.$$

Jeg minner om at x^i er medfølgende koordinater, dvs. de sitter fast i legemer som følger ekspansjonen og er konstante i tiden. Fysiske avstander finnes ved å multiplisere med skalafaktoren $a(t)\vec{x}$.

Vi kan nå sette opp Einsteinligningene for universet. Da trenger vi først Christoffelsymbolene. Disse er gitt ved

$$\Gamma^\mu_{\alpha\beta} = \frac{g^{\mu\nu}}{2}\left(g_{\alpha\nu,\beta} + g_{\beta\nu,\alpha} - g_{\alpha\beta,\nu}\right).$$

Fra Robertson-Walkerlinjeelementet leser vi ut at metrikken er gitt ved

$$g_{\mu\nu} = \mathrm{diag}(-1, a^2, a^2, a^2),$$

og følgelig er

$$g^{\mu\nu} = \mathrm{diag}(-1, 1/a^2, 1/a^2, 1/a^2).$$

For $\mu = 0$ finner vi da

$$\begin{aligned}
\Gamma^0_{\alpha\beta} &= \frac{g^{0\nu}}{2}(g_{\alpha\nu,\beta} + g_{\beta\nu,\alpha} - g_{\alpha\beta,\nu}) \\
&= -\frac{1}{2}(g_{\alpha0,\beta} + g_{\beta0,\alpha} - g_{\alpha\beta,0}) \\
&= +\frac{1}{2}g_{\alpha\beta,0},
\end{aligned}$$

som gir $\Gamma^0_{00} = 0$, $\Gamma^0_{0i} = \Gamma^0_{i0} = 0$, og

$$\Gamma^0_{ij} = \frac{1}{2}\delta_{ij}\frac{\partial}{\partial t}a^2 = a\dot{a}\delta_{ij}.$$

For $\mu = i$ finner vi videre

$$\begin{aligned}
\Gamma^i_{\alpha\beta} &= \frac{1}{2}g^{i\nu}(g_{\alpha\nu,\beta} + g_{\beta\nu,\alpha} - g_{\alpha\beta,\nu}) \\
&= \frac{1}{2a^2}(g_{\alpha i,\beta} + g_{\beta i,\alpha} - g_{\alpha\beta,i}) \\
&= \frac{1}{2a^2}(g_{\alpha i,\beta} + g_{\beta i,\alpha}),
\end{aligned}$$

slik at

$$\Gamma^i_{00} = \frac{1}{2a^2}(g_{0i,0} + g_{0i,0}) = 0,$$

$$\Gamma^i_{0j} = \frac{1}{2a^2}(g_{0i,j} + g_{ji,0}) = \frac{1}{2a^2}\delta_{ij}\frac{\partial}{\partial t}a^2 = \frac{\dot{a}}{a}\delta_{ij} = \Gamma^i_{j0},$$

og

$$\Gamma^i_{jk} = \frac{1}{2a^2}(g_{ji,k} + g_{ki,j}) = 0.$$

De eneste Christoffelsymbolene som er forskjellige fra 0 er altså

$$\begin{aligned}
\Gamma^0_{ij} &= \delta_{ij} a\dot{a} \\
\Gamma^i_{0j} &= \Gamma^i_{j0} = \delta_{ij}\frac{\dot{a}}{a}.
\end{aligned}$$

Nå er vi klare til å gå løs på Riccitensoren:

$$R_{\mu\nu} = \Gamma^\alpha_{\mu\nu,\alpha} - \Gamma^\alpha_{\mu\alpha,\nu} + \Gamma^\alpha_{\beta\alpha}\Gamma^\beta_{\mu\nu} - \Gamma^\alpha_{\beta\nu}\Gamma^\beta_{\mu\alpha}.$$

Vi finner at

$$\begin{aligned}
R_{00} &= \Gamma^\alpha_{00,\alpha} - \Gamma^\alpha_{0\alpha,0} + \Gamma^\alpha_{\beta\alpha}\Gamma^\beta_{00} - \Gamma^\alpha_{\beta 0}\Gamma^\beta_{0\alpha} \\
&= -\Gamma^i_{0i,0} - \Gamma^i_{j0}\Gamma^j_{0i} \\
&= -\sum_i \delta_{ii}\frac{\partial}{\partial t}\frac{\dot{a}}{a} - \sum_{i,j}\delta_{ij}\frac{\dot{a}}{a}\delta_{ij}\frac{\dot{a}}{a} \\
&= -3\frac{\ddot{a}a - \dot{a}^2}{a^2} - \left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 \sum_i\sum_j \delta_{ij}\delta_{ij} \\
&= -3\frac{\ddot{a}}{a} + 3\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 - 3\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 \\
&= -3\frac{\ddot{a}}{a}.
\end{aligned}$$

I noen av mellomregningene har jeg satt inn summasjonstegnene eksplisitt i et desperat håp om å gjøre utregningen litt klarere. Vi må regne mere:

$$\begin{aligned}
R_{0i} &= \Gamma^\alpha_{0i,\alpha} - \Gamma^\alpha_{0\alpha,i} + \Gamma^\alpha_{\beta\alpha}\Gamma^\beta_{0i} - \Gamma^\alpha_{\beta i}\Gamma^\beta_{0\alpha} \\
&= \Gamma^0_{\beta 0}\Gamma^\beta_{0i} + \Gamma^j_{\beta j}\Gamma^\beta_{0i} - \Gamma^0_{\beta i}\Gamma^\beta_{0i} - \Gamma^j_{\beta i}\Gamma^\beta_{0j} = 0.
\end{aligned}$$

Og nå en skikkelig versting:

$$\begin{aligned}
R_{ij} &= \Gamma^\alpha_{ij,\alpha} - \Gamma^\alpha_{i\alpha,j} + \Gamma^\alpha_{\beta\alpha}\Gamma^\beta_{ij} - \Gamma^\alpha_{\beta j}\Gamma^\beta_{i\alpha} \\
&= \Gamma^0_{ij,0} - 0 + \Gamma^\alpha_{0\alpha}\Gamma^0_{ij} - \Gamma^0_{\beta j}\Gamma^\beta_{i0} - \Gamma^k_{\beta j}\Gamma^\beta_{ik} \\
&= \frac{\partial}{\partial t}(\delta_{ij}a\dot{a}) + \delta_{ij}a\dot{a}\sum_k \delta_{kk}\frac{\dot{a}}{a} - \Gamma^0_{kj}\Gamma^k_{i0} - \Gamma^k_{0j}\Gamma^0_{ik}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \delta_{ij}(\dot{a}^2 + a\ddot{a}) + 3\delta_{ij}\dot{a}^2 - \sum_k \delta_{kj} a\dot{a}\delta_{ki}\frac{\dot{a}}{a} - \sum_k \delta_{kj}\frac{\dot{a}}{a}\delta_{ik} a\dot{a} \\
&= \delta_{ij}(\dot{a}^2 + a\ddot{a}) + 3\delta_{ij}\dot{a}^2 - \delta_{ij}\dot{a}^2 - \delta_{ij}\dot{a}^2 \\
&= \delta_{ij}(2\dot{a}^2 + a\ddot{a}).
\end{aligned}
$$

Sammenlignet med dette er Ricciskalaren den rene barnemat:

$$
\begin{aligned}
\mathcal{R} &= g^{\mu\nu}R_{\mu\nu} = -R_{00} + \frac{1}{a^2}\sum_i R_{ii} \\
&= 3\frac{\ddot{a}}{a} + \frac{1}{a^2}\sum_i \delta_{ii}(2\dot{a}^2 + a\ddot{a}) \\
&= 3\frac{\ddot{a}}{a} + \frac{3}{a^2}(2\dot{a}^2 + a\ddot{a}) \\
&= 6\left[\frac{\ddot{a}}{a} + \left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2\right].
\end{aligned}
$$

Vi kan endelig finne f.eks. 00-komponenten av Einsteintensoren:

$$
\begin{aligned}
G_{00} &= R_{00} - \frac{1}{2}g_{00}\mathcal{R} \\
&= -3\frac{\ddot{a}}{a} + \frac{1}{2}6\left[\frac{\ddot{a}}{a} + \left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2\right] \\
&= 3\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2.
\end{aligned}
$$

For å finne 00-komponenten av Einsteinligningen, trenger vi også den tilsvarende komponenten av energi-impulstensoren. For en perfekt væske var denne gitt ved

$$
T^{\mu\nu} = (\rho + p)u^\mu u^\nu + pg^{\mu\nu}.
$$

I medfølgende koordinater har væsken treerhastighet lik 0, slik at $u^\mu = (1, \vec{0})$, og

$$
T^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} \rho + p & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -p & 0 & 0 & 0 \\ 0 & p/a^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & p/a^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & p/a^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \rho & 0 & 0 & 0 \\ 0 & p/a^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & p/a^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & p/a^2 \end{pmatrix}.
$$

Da blir

$$
T_{00} = g_{0\alpha}g_{0\beta}T^{\alpha\beta} = (-1)(-1)T^{00} = T^{00} = \rho,
$$

og 00-komponenten av Einsteinligningene,

$$
G_{00} = 8\pi G T_{00},
$$

gir dermed

$$
3\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = 8\pi G\rho,
$$

eller

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \frac{8\pi G}{3}\rho.$$

Den oppmerksomme leser vil kjenne igjen denne ligningen som Friedmannligningen for $\dot{a}$ i tilfellet $k = 0$ (romlig flatt univers).

Vi husker at den kovariante divergensen til energi-impulstensoren er lik null:

$$T^{\mu\nu}_{;\nu} = 0.$$

Ser vi på $\mu = 0$-komponenten av denne ligningen, får vi et resultat som du kanskje kjenner igjen:

$$\begin{aligned}
T^{0\nu}_{;\nu} &= T^{0\nu}_{,\nu} + \Gamma^0_{\beta\nu}T^{\beta\nu} + \Gamma^\nu_{\beta\nu}T^{0\beta} \\
&= T^{00}_{,0} + \Gamma^0_{\beta\nu}T^{\beta\nu} + \Gamma^\nu_{0\nu}T^{00} \\
&= \frac{\partial\rho}{\partial t} + \Gamma^0_{ij}T^{ij} + \Gamma^i_{0i}\rho \\
&= \frac{\partial\rho}{\partial t} + \sum_i\sum_j \delta_{ij}a\dot{a}\delta_{ij}\frac{p}{a^2} + \sum_i \frac{\dot{a}}{a}\rho \\
&= \frac{\partial\rho}{\partial t} + 3\frac{\dot{a}}{a}(\rho + p),
\end{aligned}$$

der jeg har brukt de tidligere resultatene for Christoffelsymobelene for RW-metrikken, og uttrykket for energi-impulstensoren. Dermed gir $\mu = 0$-komponenten av $T^{\mu\mu}_{;\nu} = 0$ at

$$\dot{\rho} + 3\frac{\dot{a}}{a}(\rho + p) = 0,$$

som mange sikkert kjenner igjen fra AT4220, der vi utledet denne ligningen på en mye enklere, men mer tvilsom måte.